View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Elsevier - Publisher Connector

Indag. Mathem., N.S., 5 (4), 381–395 December 19, 1994

La reconstruction des fonctions holomorphes dans des domaines de $\mathbb{C}^n$

par Pierre Bonneau

Laboratoire d'Analyse Complexe et Fonctionnelle, Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex, France

Communicated by Prof. J. Korevaar at the meeting of December 20, 1993

SUMMARY

We give explicit integral formulas for the reconstruction of holomorphic functions on a strictly pseudoconvex domain in $\mathbb{C}^n$, from their values on a submanifold of the boundary.

I. INTRODUCTION ET RESULTATS

Soit D un domaine strictement pseudoconvexe et borné dans $\mathbb{C}^n$, à frontière de classe C^2. Un sous-ensemble S du bord ∂D de D est dit déterminant si deux fonctions holomorphes dans D et continues sur $\bar{D}$ sont égales dès qu'elles coïncident sur S. Ainsi, tout ouvert du bord de D est un ensemble déterminant mais il existe des ensembles déterminants bien plus petits: on peut même construire des courbes lisses déterminantes dans le bord de D (voir [R]). Dans [P], Pincuk propose une condition suffisante pour qu'une sous-variété du bord de D soit déterminante.

La connaissance des valeurs d'une fonction holomorphe dans D et continue dans $\bar{D}$ sur un ensemble déterminant suffit donc pour déterminer la valeur de cette fonction en n'importe quel point de D. La question se pose donc de reconstruire par des formules explicites une telle fonction à partir de ses seules valeurs sur un ensemble déterminant. Carleman ([C]) en dimension 1, Patil ([P1], [P2]) dans le disque de $\mathbb{C}$ ou le polydisque de $\mathbb{C}^2$, Aizenberg ([A]) lorsque S est un sous-ensemble du bord de D dont la mesure de Lebesgue $(2n-1)$-dimensionnelle est positive ont, par exemple, étudié ce type de problème.

Dans les articles cités ci-dessus, la fonction reconstruite est la limite d'une suite de fonctions holomorphes dans D obtenues à l'aide d'une formule intégrale, l'intégration portant sur S, l'ensemble déterminant. On ne peut espérer obtenir, pour une fonction f holomorphe dans D et continue dans $\bar{D}$, une formule de représentation intégrale

$$f(z) = \int_S f(\zeta) K(\zeta, z)$$

avec un noyau $K(\zeta, z)$ absolument intégrable: l'existence d'une telle formule signifierait que $f(z)$ est petite, $z \in D$, lorsque f est petite sur S, ce qui bien sûr n'est pas vrai. On ne peut donc faire l'économie d'un processus de passage à la limite après l'intégration sur S. Ce passage à la limite est, ici, traduit par une intégrale impropre.

Soit donc D un domaine strictement pseudoconvexe et borné dans $\mathbb{C}^n$, à frontière de classe C^2. Soit ρ une fonction définissante strictement plurisousharmonique pour $D = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$. Considérons un point z_0 du bord ∂D de D et U un voisinage de z_0 dans $\mathbb{C}^n$. Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des fonctions réelles pluriharmoniques dans $U (0 \leqslant p \leqslant n-1)$ telles que

$$(1) \qquad \partial u_1(z_0) \wedge \partial u_2(z_0) \wedge \cdots \wedge \partial u_p(z_0) \wedge \partial \rho(z_0) \neq 0.$$

Quitte à restreindre le voisinage U de z_0, on peut, par continuité, supposer que $\partial u_1 \wedge \partial u_2 \wedge \cdots \wedge \partial u_p \wedge \partial \rho$ ne s'annule pas dans U. On définit enfin S:

$$(2) \qquad S = \{z \in U \cap \partial D : u_1(z) = u_2(z) = \cdots = u_p(z) = 0\}.$$

D'après [P], S est déterminant.

Maintenant, soit f une fonction holomorphe dans D et continue dans $\bar{D}$.

Pour z dans D, nous voulons exprimer $f(z)$ à partir des seules valeurs de f sur l'ensemble S.

Dans le cas $n = 1$ (et $p = 0$), nous pouvons nous ramener (voir remarque 9) au cas où D est un ouvert d'adhérence contenue dans le disque unité et tel que

$$C^+ = \partial D \cap \{\operatorname{Im} z > 0\} \subset S.$$

Notre méthode reprend alors les idées de Carleman [C]. D'après le théorème de Cauchy, pour tout $z \in D$, on a:

$$f(z) = \frac{1}{2i\Pi} \int_{\partial D} f(w) \exp\left\{ \frac{ia}{2\Pi} \left[\log \frac{w-1}{w+1} - \log \frac{z-1}{z+1} \right] \right\} \frac{\mathrm{d}w}{w-z},$$

où $a > 0$ et $\log z$ désigne la détermination du logarithme de z dont la partie imaginaire est dans l'intervalle $[-\Pi/2, 3\Pi/2[$.

Mais si $w \in C^- = \partial D \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}$ et $z \in D^+ = D \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$, alors il existe $\delta = \delta_z > 0$ tel que

$$\left| \exp\left\{ \frac{ia}{2\Pi} \left[\log \frac{w-1}{w+1} - \log \frac{z-1}{z+1} \right] \right\} \right| \leqslant \exp\left(\frac{-a\delta}{2\Pi} \right).$$

Il découle alors du théorème de la convergence dominée de Lebesgue que, pour tout $z \in D^+$:

$$f(z) = \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{2i\Pi} \exp\left\{\frac{-ia}{2\Pi}\log\frac{z-1}{z+1}\right\} \int_{C^+} f(w)\exp\left\{\frac{ia}{2\Pi}\log\frac{w-1}{w+1}\right\}\frac{dw}{w-z}.$$

La fonction f est ainsi reconstruite dans un ouvert de D et nous pourrons en déduire ses valeurs en tout point de D.

Dans le cas $n > 1$, pour reconstruire f, il nous faudra procéder en plusieurs étapes, étapes d'autant plus nombreuses que p est grand. Nous distinguerons donc plusieurs cas. Tout d'abord, dans un premier cas, nous supposerons que $p = 0$, c'est-à-dire que $S = U \cap \partial D$ est un ouvert du bord de D. Nous reconstruirons, alors, f d'abord au voisinage de z_0, puis à l'aide d'une méthode de Borel, retrouverons f dans D entier. Dans un second cas, lorsque $p = 1$, nous obtiendrons d'abord la restriction de f à une sous-variété de codimension 1 contenant z_0. Nous en déduirons les valeurs de f sur un petit ouvert de D, puis, par la méthode de Borel, sur D entier. Dans le troisième cas, nous supposerons que $1 \leqslant p \leqslant n-2$. Dans une première étape, nous reconstruirons f sur une sous-variété de codimension réelle p. Procédant comme dans le second cas, nous pourrons alors exprimer f dans un ouvert d'une sous-variété de codimension réelle $p-1$ de D. Réitérant le procédé, nous parviendrons, en plusieurs étapes successives, à expliciter f dans un ouvert de D et rejoindrons ainsi les premier et deuxième cas. Enfin, dans un quatrième cas, nous envisagerons $p = n-1$. Parce que tout ouvert de $\mathbb{C}$ est pseudoconvexe, la première étape, pour reconstruire f sur une sous-variété de codimension réelle $n-1$, utilisera la méthode de Carleman ci-dessus. Nous procéderons ensuite comme dans le troisième cas.

II. PREMIER CAS: $p = 0$, $n \geqslant 2$

Alors $S = U \cap \partial D$ est un ouvert du bord de D.

1ère étape. Reconstruction de f au voisinage de z_0.

Dans [N], Narasimhan démontre le lemme suivant:

Lemme 1. *Soit D un domaine strictement pseudoconvexe, z_0 un point du bord de D en lequel le plan tangent complexe au bord a pour équation*

$$z_n = z_{0n}.$$

Il existe alors un voisinage V de z_0 et un changement explicite φ de coordonnées holomorphes tel que $\varphi(V \cap D)$ soit strictement convexe. De plus, ce changement de coordonnées holomorphes n'affecte que la dernière coordonnée z_n.

On peut donc, sans particulariser, supposer que $U \cap D$ est un domaine strictement convexe à frontière de classe C^2.

A cause de la stricte convexité de $U \cap D$, il existe un hyperplan réel de $\mathbb{C}^n$ qui coupe $D \cap U$, ne contient pas z_0 et tel que le demi-espace H^- limité par H et contenant z_0 satisfasse $\partial D \cap H^- \subset S$. Avec la méthode de Range et Siu [RS], nous allons obtenir une représentation intégrale de f dans

$$D_1 = D \cap H^-$$

à partir des seules valeurs de f sur $S_1 = \partial D \cap \bar{H}^- \subset S$.
D'abord, nous pouvons, sans particulariser, supposer que

$$H = \{z : \rho_2(z) := \operatorname{Re} z_n = 0\},$$

et que

$$H^- = \{z : \rho_2(z) = \operatorname{Re} z_n < 0\}.$$

Ainsi

$$D_1 = D \cap H^- = \{z : \rho_1(z) := \rho(z) < 0 \text{ et } \rho_2(z) = \operatorname{Re} z_n < 0\} \tag{3}$$

et

$$S_1 = \partial D \cap \bar{H}^- = \{z \in \partial D_1 : \rho_1(z) = \rho(z) = 0\}. \tag{4}$$

Définissons aussi

$$S_2 = \{z \in \partial D_1 : \rho_2(z) = \operatorname{Re} z_n = 0\} = \bar{D} \cap H \tag{5}$$

et

$$S_{12} = \{z \in \partial D_1 : \rho_1(z) = \rho_2(z) = 0\} = \partial D \cap H. \tag{6}$$

S_{12} sera orienté de telle façon que nous puissions utiliser la formule de Stokes avec $\partial S_1 = S_{12}$.

Le principe de la démonstration de [RS] reste valable et nous allons seulement préciser les changements que nous obtenons pour l'opérateur de représentation intégrale par rapport à l'opérateur T_0 de [RS] (page 335); à la différence de [RS], les faces S_1 et S_2 de D_1 ne sont pas toutes strictement pseudoconvexes. Reprenant les notations de [RS] (p. 331), précisons notre choix pour la section

$$w = (w_1, \dots, w_n)$$

du fibré de Cauchy–Leray en posant, pour $\nu = 1, \dots, n$,

$$w_\nu(\zeta, \lambda, z) = \lambda_0 \frac{\overline{\zeta_\nu - z_\nu}}{|\zeta - z|^2} + \lambda_1 \frac{\dfrac{\partial \rho}{\partial \zeta_\nu}(\zeta)}{\langle \partial\rho(\zeta), \zeta - z\rangle} + \lambda_2 \frac{\delta_\nu^n}{\zeta_n - z_n}, \tag{7}$$

où δ_ν^n est le symbole de Kronecker, $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ et

$$\langle \partial\rho(\zeta), \zeta - z\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho(\zeta)}{\partial \zeta_i} (\zeta_i - z_i).$$

L'intégrale sur la face plate S_2 devient alors nulle (la forme de Lévi de ρ_2 est nulle). Pour l'intégrale sur l'arête S_{12}, nous obtenons en fait un noyau dont la forme très simple sera exploitée par la suite. Définissons:

$$
(8) \qquad \begin{cases} w^{(1)}(\zeta, z) = w(\zeta, (0,1,0), z), \\ w^{(2)}(\zeta, z) = w(\zeta, (0,0,1), z), \\ \omega'(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \zeta_k \, d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\zeta_k} \wedge \cdots \wedge d\zeta_{n-1}, \\ \omega(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n, \end{cases}
$$

où le signe $\wedge$ signifie que le facteur correspondant est omis. Nous avons

$$
\bar{\partial}_\zeta w^{(2)} = 0
$$

pour $z \in D_1$ et ζ au voisinage de S_{12}; cette égalité intervient lors des intégrations en λ requises (fin du § 2–6 de [RS]). Nous obtenons finalement le théorème suivant dans lequel $c_n = (-1)^{(n(n-1)/2)}(2i\pi)^{-n}$:

Théorème 2. *Si f est une fonction de classe C^1 sur $\bar{D}_1$ et holomorphe dans D_1, alors pour tout z de D_1, on a:*

$$
(9) \qquad \begin{cases} f(z) = c_n \Bigg[\displaystyle\int_{S_1} f(\zeta) \wedge \frac{\partial\rho(\zeta) \wedge (\bar{\partial}\partial\rho(\zeta))^{n-1}}{\langle \partial\rho(\zeta), \zeta - z \rangle^n} \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{S_{12}} f(\zeta) \wedge \frac{\omega'(w^{(1)}) \wedge \omega(\zeta)}{\zeta_n - z_n} \Bigg]. \end{cases}
$$

Par un processus limite classique, ce théorème s'étend au cas où f est seulement continue sur $\bar{D}_1$. Ainsi, ce théorème permet de reconstruire la fonction holomorphe dans D continue dans $\bar{D}$ donnée dans l'introduction à l'aide de ses valeurs sur S seulement, dans tout un ouvert D_1 de D. Ceci termine la 1ère étape.

2ème étape. Reconstruction de f dans D entier.

La fonction f est maintenant connue dans un voisinage ouvert D_1 d'un point z_1 de D. Il s'agit dès lors de reconstruire f dans D tout entier. Pour ce faire, nous utiliserons une méthode de prolongement des fonctions holomorphes due à Borel (voir [B], [H] p. 184..., [AT]).

Nous avons le

Théorème 3. *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine D strictement convexe de $\mathbb{C}^n$, continue dans $\bar{D}$, z_1 un point de D et soit $D_0 = \{\rho_0 < 0\}$ un voisinage strictement convexe de z_1 dans D (ρ_0 est une fonction définissante de D_0). Pour tout point z de D, définissons*

$$
D_{z_1 z} = \left\{ \zeta \in \mathbb{C}^n : \exists t \in \bar{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) : \zeta - z_1 = t(z - z_1) \right\},
$$

où

$$
\bar{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left\{ t \in \mathbb{C} : \left| t - \frac{1}{2} \right| \leqslant \frac{1}{2} \right\}.
$$

Alors, pour tout point z de D tel que $D_{z_1 z} \subset D$, on a

$$(10) \qquad f(z) = c_n \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1}\, \mathrm{d}t \int_{\partial D_0} e^{t\langle v_0, z - z_1\rangle} f(\zeta)\omega'(v_0) \wedge \omega(\zeta),$$

où $v_0 = (v_0^1(\zeta, z), \ldots, v_0^n(\zeta, z))$ avec

$$v_0^i(\zeta, z) = \frac{\partial \rho_0}{\partial \zeta_i}(\zeta)\left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho_0}{\partial \zeta_j}(\zeta)(\zeta_j - z_{1j})\right]^{-1},$$

où $\langle v_0, z - z_1\rangle = \sum_{j=1}^n v_0^j(\zeta, z)(z_j - z_{1j})$.

Pour la démonstration de ce théorème, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 4. *$D_{z_1 z}$ est inclus dans D si et seulement si*

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\langle \partial\rho(\zeta), \zeta - z\rangle}{\langle \partial\rho(\zeta), \zeta - z_1\rangle}\right] > 0$$

pour tout $\zeta \in \partial D$.

En effet, transformé par l'inversion $z \to z^{-1}$,

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\langle \partial\rho(\zeta), \zeta - z\rangle}{\langle \partial\rho(\zeta), \zeta - z_1\rangle}\right] = 1 - \operatorname{Re}\left[\frac{\langle \partial\rho(\zeta), z - z_1\rangle}{\langle \partial\rho(\zeta), \zeta - z_1\rangle}\right] > 0$$

signifie que $\langle \partial\rho(\zeta), z - z_1\rangle^{-1} \langle \partial\rho(\zeta), \zeta - z_1\rangle$ n'appartient pas à $\bar{B}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, c'est-à-dire que $D_{z_1 z}$ ne coupe pas $T_{\partial D}^{\mathbb{C}}(\zeta)$, le plan tangent complexe à ∂D en ζ, ce qui n'est vrai, pour tout ζ de ∂D, que si $D_{z_1 z} \subset D$.

Remarquons que, par continuité, si les hypothèses du lemme sont satisfaites, alors il existe $\delta_z > 0$ tel que, pour tout ζ de ∂D, on ait:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\langle \partial\rho(\zeta), \zeta - z\rangle}{\langle \partial\rho(\zeta), \zeta - z_1\rangle}\right] \geqslant \delta_z > 0.$$

Démonstration du théorème 3. Soit, pour $\lambda \in [0, 1]$ et z dans un voisinage de $\bar{D}$, $\rho_\lambda(z) : [0, 1] \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ une homotopie C^∞ de $D_0 = \{\rho_0 < 0\}$ sur $D = \{\rho = \rho_1 < 0\}$ telle que, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $D_\lambda = \{\rho_\lambda < 0\}$ soit convexe et contienne z_1.

Soit $v_\lambda(\zeta) = (v_{\lambda 1}(\zeta), v_{\lambda 2}(\zeta), \ldots, v_{\lambda n}(\zeta)) : \partial D_\lambda \to \mathbb{C}^n$ l'application définie par:

$$v_{\lambda j}(\zeta) = \frac{\partial \rho_\lambda}{\partial \zeta_j}(\zeta)[\langle \partial\rho_\lambda(\zeta), \zeta - z_1\rangle]^{-1}.$$

D'après le théorème 2, pour tout z dans D, on a

$$
(11)\quad \begin{cases} f(z) = c_n \int\limits_{\partial D} f(\zeta) \dfrac{\omega'(v_1) \wedge \omega(\zeta)}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n} v_{1i}(\zeta)(\zeta_i - z_i)\right]^n} \\ \quad = c_n \int\limits_{\partial D} f(\zeta) \dfrac{\omega'(v_1) \wedge \omega(\zeta)}{\left[1 - \sum\limits_{i=1}^{n} v_{1i}(\zeta)(z_i - z_{1i})\right]^n} \\ \quad = \dfrac{c_n}{(n-1)!} \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\omega'(v_1) \wedge \omega(\zeta) \int\limits_0^\infty e^{-t} e^{t\langle v_1, z - z_1\rangle} t^{n-1}\, \mathrm{d}t, \end{cases}
$$

où

$$
\langle v_1, z - z_1\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_{1i}(z_i - z_{1i}).
$$

Mais, d'après le lemme 4,

$$
\mathrm{Re}[-t + t\langle v_1, z - z_1\rangle] \leqslant -\delta_z t \quad \text{avec } \delta_z > 0,
$$

donc, on peut utiliser le théorème de Fubini,

$$
(12)\qquad f(z) = c \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{n-1}\, \mathrm{d}t \int\limits_{\partial D} f(\zeta) e^{t\langle v_1, z - z_1\rangle} \omega'(v_1) \wedge \omega(\zeta).
$$

Mais, d'après la définition de v_λ, pour tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$
\sum_{i=1}^{n} v_{\lambda i}(\zeta)(\zeta_i - z_{1i}) = 1,
$$

donc, en différentiant:

$$
\sum_{i=1}^{n} \bar\partial v_{\lambda i}(\zeta)(\zeta_i - z_{1i}) = 0.
$$

Par conséquent

$$
\bar\partial v_{\lambda 1} \wedge \bar\partial v_{\lambda 2} \wedge \cdots \wedge \bar\partial v_{\lambda n} = 0,
$$

ce qui implique

$$
\begin{aligned} \mathrm{d}_\zeta[f(\zeta) e^{t\langle v_\lambda, z - z_1\rangle} \omega'(v_\lambda) \wedge \omega(\zeta)] &= f(\zeta) \bar\partial_\zeta [e^{t\langle v_\lambda, z - z_1\rangle} \omega'(v_\lambda) \wedge \omega(\zeta)] \\ &= 0, \end{aligned}
$$

d'où, en posant $H_\lambda = \{(\zeta, v_\lambda(\zeta)) \in \mathbb{C}^{2n} : \zeta \in \partial D_\lambda\}$ avec $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$
\begin{aligned} &\int\limits_{\partial D} f(\zeta) e^{t\langle v_1, z - z_1\rangle} \omega'(v_1) \wedge \omega(\zeta) - \int\limits_{\partial D_0} f(\zeta) e^{t\langle v_0, z - z_1\rangle} \omega'(v_0) \wedge \omega(\zeta) \\ &\quad = \int\limits_{H_1 - H_0} f(\zeta) e^{t\langle v_\lambda(\zeta), z - z_1\rangle} \omega'(v_\lambda) \wedge \omega(\zeta) \\ &\quad = \int\limits_{D_1 - D_0} \mathrm{d}_\zeta [f(\zeta) e^{t\langle v_\lambda(\zeta), z - z_1\rangle} \omega'(v_\lambda) \wedge \omega(\zeta)] \\ &\quad = 0. \end{aligned}
$$

En utilisant cette relation dans la formule (12), on termine la démonstration du théorème 3.

A l'issue de la 1ère étape, la fonction f est exprimée dans un voisinage D_1 (relatif à $\bar{D}$) de z_0 à partir de ses valeurs sur S.

Si z_1 est un point intérieur à D_1, la boule $B(z_1, \varepsilon)$ de centre z_1 et de rayon ε est, si ε est assez petit, contenue dans D_1: f est donc connue sur le bord $\partial B(z_1, \varepsilon)$ de cette boule. A l'aide du théorème 3, on peut donc exprimer $f(z)$ en tout point z de D pour lequel

$$D_{z_1 z} \subset D,$$

en choisissant, par exemple $D_0 = B(z_1, \varepsilon)$. On a alors

$$D_0 = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \rho_0(\zeta) < 0\} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta - z_1|^2 - \varepsilon^2 < 0\},$$

et, par conséquent, lorsque $\zeta \in \partial D_0 = S(z_1, \varepsilon)$,

$$v_{0i}(\zeta) = \frac{\overline{\zeta_i - z_{1i}}}{\varepsilon^2},$$

$$\langle v_0(\zeta), z - z_1 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\overline{\zeta_i - z_{1i}})(z_i - z_{1i})}{\varepsilon^2},$$

$$\begin{aligned} \omega'(v_0(\zeta)) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\overline{\zeta_k - z_{1k}}\, \mathrm{d}\bar{\zeta}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}\bar{\zeta}_k} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\bar{\zeta}_n}{\varepsilon^{2n}} \\ &= \frac{\omega'(\overline{\zeta - z_1})}{\varepsilon^{2n}}. \end{aligned}$$

D'après le théorème 2, pour tout $z \in \partial D_0$,

$$\begin{aligned} f(z) = c_n \Bigg[\int_{S_1} f(\zeta) \wedge \frac{\partial\rho(\zeta) \wedge (\bar{\partial}\partial\rho(\zeta))^{n-1}}{\langle \partial\rho(\zeta), \zeta - z\rangle^n} \\ + \int_{S_{12}} f(u) \wedge \frac{\partial\rho(u) \wedge (\bar{\partial}\partial\rho(u))^{n-2} \wedge \mathrm{d}u_n}{(u_n - z_n)\langle \partial\rho(u), u - z\rangle^{n-1}} \Bigg]. \end{aligned}$$

On va appliquer le théorème 3 pour le second terme du membre de droite. Pour tout z de D tel que $D_{z_1 z} \subset D$ on obtient que ce membre est égal à

$$\begin{aligned} c_n \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1}\, \mathrm{d}t \int_{S(z_1, \varepsilon)} \exp\left[\frac{t\langle \overline{\zeta - z_1}, z - z_1\rangle}{\varepsilon^2}\right] \frac{\omega'(\overline{\zeta - z_1})\omega(\zeta)}{\varepsilon^{2n}} \\ \times \int_{S_{12}} \frac{f(u)\partial\rho(u) \wedge (\bar{\partial}\partial\rho(u))^{n-2} \wedge \mathrm{d}u_n}{(u_n - \zeta_n)\langle \partial\rho(u), u - \zeta\rangle^{n-1}}. \end{aligned}$$

Lorsque $u \in S_{12}$ et $\zeta \in S(z_1, \varepsilon)$, $|\langle \partial\rho(u), u - \zeta\rangle| \geqslant c > 0$, donc, d'après le théorème de Fubini, on obtient

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{n-1}\, \mathrm{d}t \int_{u \in S_{12}} f(u)\partial\rho(u) \wedge (\bar{\partial}\partial\rho(u))^{n-2} \wedge \mathrm{d}u_n$$
$$\wedge \int_{\zeta \in S(z_1,\varepsilon)} \frac{\exp[t\varepsilon^{-2}\langle\overline{\zeta - z_1}, z - z_1\rangle]\omega'(\overline{\zeta - z_1}) \wedge \omega(\zeta)}{\varepsilon^{2n}(u_n - \zeta_n)\langle \partial\rho(u), u - \zeta\rangle^{n-1}}.$$

Si D est convexe, la première intégrale du membre de droite dans l'expression de $f(z)$ définit une fonction holomorphe pour tout z de D (et même bien au-delà: il suffit que le dénominateur ne s'annule pas). Si D n'est pas convexe, on applique le théorème 3 aussi pour le premier terme du membre de droite.

On a donc le

Théorème 5. *Si f est une fonction holomorphe dans D et continue dans $\bar{D}$ alors pour tout z de D tel que $D_{z_1 z} \subset D$, on a*

$$f(z) = c\left[\int_0^\infty e^{-t} t^{n-1}\, \mathrm{d}t \int_{u \in S_1} f(u)\partial\rho(u) \wedge (\partial\bar{\partial}\rho(u))^{n-1}\right.$$
$$\times \int_{\zeta \in S(z_1,\varepsilon)} \frac{\exp[t\varepsilon^{-2}\langle\overline{\zeta - z_1}, z - z_1\rangle]\omega'(\overline{\zeta - z_1}) \wedge \omega(\zeta)}{\varepsilon^{2n}\langle \partial\rho(u), u - \zeta\rangle^{n}}$$
$$+ \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1}\, \mathrm{d}t \int_{u \in S_{12}} f(u)\partial\rho(u) \wedge (\bar{\partial}\partial\rho(u))^{n-2} \wedge \mathrm{d}u_n$$
$$\left.\times \int_{\zeta \in S(z_1,\varepsilon)} \frac{\exp[t\varepsilon^{-2}\langle\overline{\zeta - z_1}, z - z_1\rangle]\omega'(\overline{\zeta - z_1}) \wedge \omega(\zeta)}{\varepsilon^{2n}(u_n - \zeta_n)\langle \partial\rho(u), u - \zeta\rangle^{n-1}}\right].$$

Remarque 6. Il est facile de vérifier que la dernière intégrale du membre de droite est indépendante de ε: nous la noterons

$$(13)\qquad A(t, u, z, z_1) = \int_{\zeta \in S(z_1,\varepsilon)} \frac{\exp[t\varepsilon^{-2}\langle\overline{\zeta - z_1}, z - z_1\rangle]\omega'(\overline{\zeta - z_1}) \wedge \omega(\zeta)}{\varepsilon^{2n}(u_n - \zeta_n)\langle \partial\rho(u), u - \zeta\rangle^{n-1}}.$$

En effet, si, pour un n-uplet $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ d'entiers non négatifs, on note, comme d'habitude, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$ et

$$[\partial\rho(u)]^\alpha = \frac{\partial\rho(u)^{\alpha_1}}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial\rho(u)^{\alpha_n}}{\partial u_n},$$

en développant la fonction à intégrer en série entière, on obtient:

$$
\begin{aligned}
&A(t,u,z,z_1)\\
&= \int_{\zeta\in S(0,\varepsilon)} \frac{\exp[t\varepsilon^{-2}\langle\bar\zeta, z-z_1\rangle]\omega'(\bar\zeta)\wedge\omega(\zeta)}{\varepsilon^{2n}(u_n - z_{1n} - \zeta_n)\langle\partial\rho(u), u - z_1 - \zeta\rangle^{n-1}}\\
&= \int_{\zeta\in S(0,\varepsilon)} \sum_\alpha \frac{(n-2+|\alpha|)![\partial\rho(u)]^\alpha\zeta^\alpha}{(n-2)!\alpha!\langle\partial\rho(u), u-z\rangle^{n-1+|\alpha|}} \sum_\beta \frac{t^{|\beta|}(z-z_1)^\beta\bar\zeta^\beta}{\varepsilon^{2|\beta|}\beta!}\\
&\quad\times \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\zeta_n^r}{(u_n - z_{1n})^{r+1}} \frac{\omega'(\bar\zeta)\omega(\zeta)}{\varepsilon^{2n}}\\
&= \sum_{a',\beta',p,q,r}\\
&\quad\times \frac{(n-2+|\alpha'|+p)![\partial\rho(u)']^{\alpha'} \dfrac{\partial\rho(u)^p}{\partial u_n} t^{|\beta'|+q}(z'-z_1')^{\beta'}(z_n - z_{1n})^q}{(n-2)!\alpha'!p!\langle\partial\rho(u), u-z_1\rangle^{n-1+|\alpha'|+p}\varepsilon^{2|\beta'|+2q}\beta'!q!(u_n - z_{1n})^{r+1}}\\
&\quad\times \int_{\zeta\in S(0,\varepsilon)} \zeta'^{\alpha'}\bar\zeta'^{\beta'}\zeta_n^{p+r}\bar\zeta_n^q \frac{\omega'(\bar\zeta)\omega(\zeta)}{\varepsilon^{2n}},
\end{aligned}
$$

où l'on a posé $\alpha = (\alpha', p)$, $\beta = (\beta', q)$ avec α' et β' dans $\mathbb{N}^{n-1}$ et $z'^{\alpha'} = z_1^{\alpha_1}\cdots z_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$.

Mais, pour des raisons de parité évidentes, cette dernière intégrale est nulle à moins que $\alpha' = \beta'$ et $q = p + r$. On peut alors la calculer:

$$
\begin{aligned}
&A(t,u,z,z_1)\\
&= \sum_\alpha \sum_{r=0}^{\infty}\\
&\quad\times \frac{(n-2+|\alpha|)![\partial\rho(u)]^\alpha t^{|\alpha|+r}(z-z_1)^\alpha(z_n - z_{1n})^r}{(n-2)!\alpha!\langle\partial\rho(u), u-z_1\rangle^{n-1+|\alpha|}(|\alpha|+r+n-1)!(u_n - z_{1n})^{r+1}}\\
&= \frac{1}{(n-2)!t^{n-1}} \sum_\alpha \frac{(n-2+|\alpha|)![\partial\rho(u)]^\alpha(z-z_1)^\alpha(u_n - z_{1n})^{|\alpha|+n-2}}{\alpha!\langle\partial\rho(u), u-z_1\rangle^{n-1+|\alpha|}(z_n - z_{1n})^{|\alpha|+n-1}}\\
&\quad\times \Bigg[\exp\left[\frac{t(z_n - z_{1n})}{u_n - z_{1n}}\right] - 1\\
&\qquad - \frac{t(z_n - z_{1n})}{u_n - z_{1n}} - \cdots - t^{|\alpha|+n-2}\frac{(z_n - z_{1n})^{|\alpha|+n-2}}{(u_n - z_{1n})^{|\alpha|+n-2}}\Bigg].
\end{aligned}
$$

$A(t,u,z,z_1)$ est bien indépendant de ε.

Remarque 7. Le théorème 5 permet de reconstruire f à partir de ses valeurs sur S dans l'ouvert D_2 constitué des points z de D tels que $D_{z_1 z} \subset D$. Choisissant un point z_2 de D_2, on peut réutiliser le théorème en remplaçant z_1 par z_2. Un nombre fini d'applications réitérées de ce processus permet alors de reconstituer f dans D entier. Le problème est donc résolu dans le premier cas.

Au voisinage de z_0, soit g_1 une fonction holomorphe telle que $\operatorname{Re} g_1 = u_1$. D'après (1) et le lemme 1, il existe un système de coordonnées holomorphes au voisinage de z_0,

$$(z_1 = g_1, z_2, \ldots, z_n)$$

tel que le plan tangent complexe en z_0 à ∂D ait pour équation $z_n = z_{0n}$ et que D soit strictement convexe au voisinage de z_0. Il existe donc un hyperplan réel, H dont on peut supposer qu'il a pour équation $\operatorname{Re} z_n = 0$, tel que le demi-espace H^- limité par H et contenant z_0 vérifie

$$S' = \partial D \cap H_1 \cap H^- \subset S,$$

où $H_1 = \{\operatorname{Re} z_1 = 0\}$ est un hyperplan qui contient S. Enfin posons

$$V = D \cap H_1.$$

1ère étape. Reconstruction de f dans un ouvert de V.
Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on définit la variété analytique

$$V_y = \{z \in \mathbb{C}^n : z_1 = iy\}$$

qui est contenue dans l'hyperplan H_1. La fonction f est connue sur $S' \cap V_y$ et nous voulons reconstruire f sur $V_y \cap H^- \cap D$. Nous sommes ramenés, dans V_y, au problème résolu dans le premier cas. En procédant comme dans la première étape du premier cas, on peut, pour tout z dans $V_y \cap H^- \cap D$, exprimer $f(z)$ à l'aide des valeurs de f sur $S' \cap V_y$ qui sont connues. D'après le théorème 2, on a pour tout $z \in V_y \cap H^- \cap D$

$$(14)\qquad \begin{cases} f(z) = c_{n-1}\Bigg[\displaystyle\int_{\zeta \in V_y \cap S'} \frac{f(\zeta)\partial\rho(\zeta) \wedge (\bar\partial\partial\rho(\zeta))^{n-2}}{\langle \partial\rho(\zeta), \zeta - z\rangle^{n-1}} \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{\zeta \in S \cap H \cap V_y} \frac{f(\zeta)\partial\rho(\zeta) \wedge (\bar\partial\partial\rho(\zeta))^{n-3} \wedge \mathrm{d}\zeta_n}{(\zeta_n - z_n)\langle \partial\rho(\zeta), \zeta - z\rangle^{n-2}}\Bigg]. \end{cases}$$

Cette formule étant vraie pour tout y (tel que V_y coupe $H^- \cap D$), on connait $f(z)$ en tout point de $\bigcup_y (V_y \cap H^- \cap D) = V \cap H^-$.

2ème étape. Reconstruction de f dans un ouvert de D.

Définissons $H_1^+ = \{\operatorname{Re} z_1 > 0\}$ et $H_1^- = \{\operatorname{Re} z_1 < 0\}$. On veut exprimer $f(z)$ pour z dans un ouvert de D à partir des valeurs de f sur $V \cap H^-$.

Soit w un point de $V \cap H^-$ et soit $R > 0$ suffisamment petit pour que la boule B de centre w et de rayon R soit contenue dans $D \cap H^-$. On notera $B^+ = B \cap H_1^+$ et $B^- = B \cap H_1^-$.

$\rho_1(z) = |z - w|^2 - R^2$ est une fonction définissante pour la boule $B = \{\rho_1 < 0\}$.

Lemme 8. *Soit $R > \varepsilon > 0$. Alors pour tout z dans la boule de centre w et de rayon $R - \varepsilon$, on a*

$$f(z) = c \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} \,\mathrm{d}t \int_{u \in \partial B \cap H_1} f(u) B(t,u,z),$$

où $B(t,u,z) = [A(t,u,z,w_0) - A(t,u,z,\tilde{w}_0)] \partial\rho_1(u) \wedge (\bar{\partial}\partial\rho_1(u))^{n-2} \wedge \mathrm{d}u_1$, *avec w_0 et $\tilde{w}_0$ définis ci-dessous (à la suite de* (15)) *et*

$$A(t,u,z,w) = \int_{\zeta \in S(w,\varepsilon/4)} \frac{\exp[16t\varepsilon^{-2}\langle \overline{\zeta - w}, z - w\rangle] \omega'(\bar{\zeta}) \wedge \omega(\zeta)}{4^{-2n}\varepsilon^{2n}(u_n - \zeta_n)\langle \overline{u - w}, u - \zeta\rangle^{n-1}}.$$

En effet notons

$$S_1 = H_1^+ \cap \partial B,$$
$$S_2 = H_1^- \cap \partial B,$$
$$S_{12} = H_1 \cap \partial B.$$

D'après le théorème 2, pour tout z dans B, on a:

$$(15) \quad \begin{cases} f(z) = c \displaystyle\int_{u \in S_1} f(u) \frac{\partial\rho_1(u) \wedge (\bar{\partial}\partial\rho_1(u))^{n-1}}{\langle \overline{u - w}, u - z\rangle^n} \\ \qquad + \displaystyle\int_{u \in S_2} f(u) \frac{\partial\rho_1(u) \wedge (\bar{\partial}\partial\rho_1(u))^{n-1}}{\langle \overline{u - w}, u - z\rangle^n}. \end{cases}$$

Soient w_0 le point de coordonnées $(\varepsilon/2 + w_1, w_2, \dots, w_n)$ et $\tilde{w}_0$ le point de coordonnées $(-\varepsilon/2 + w_1, w_2, \dots, w_n)$. Posons $\varepsilon' = \varepsilon/4$. Alors la sphère $S(w_0, \varepsilon')$ de centre w_0 et de rayon ε' est contenue dans B^+ tandis que la sphère $S(\tilde{w}_0, \varepsilon')$ de centre $\tilde{w}_0$ et de rayon ε' est contenue dans B^-.

Alors, d'après le théorème 5 utilisé dans la boule B et avec les notations de la remarque 6, on a, pour tout z tel que $D_{w_0 z} \subset B$:

$$(16) \quad \begin{cases} f(z) = c \displaystyle\int_{u \in S_1} f(u) \frac{\partial\rho_1(u) \wedge (\bar{\partial}\partial\rho_1(u))^{n-1}}{\langle \overline{u - w}, u - z\rangle^n} \\ \qquad + \displaystyle\int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} \,\mathrm{d}t \int_{u \in S_{12}} f(u) \\ \qquad \times A(t,u,z,w_0) \partial\rho_1(u) \wedge (\bar{\partial}\partial\rho_1(u))^{n-2} \wedge \mathrm{d}u_1. \end{cases}$$

En comparant (15) et (16), on obtient donc que, pour tout z tel que $D_{w_0 z} \subset B$, on a:

$$(17) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{u \in S_2} f(u) \frac{\partial\rho_1(u) \wedge (\bar{\partial}\partial\rho_1(u))^{n-1}}{\langle \overline{u - w}, u - z\rangle^n} \\ \quad = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} \,\mathrm{d}t \int_{u \in S_{12}} f(u) A(t,u,z,w_0) \partial\rho_1(u) \wedge (\bar{\partial}\partial\rho_1(u))^{n-2} \wedge \mathrm{d}u_1. \end{cases}$$

De la même façon, on démontre que, pour tout z tel que $D_{\tilde{w}_0 z} \subset D$, on a:

$$(18)\quad \begin{cases} \int\limits_{u\in S_1} f(u)\dfrac{\partial\rho_1(u)\wedge(\bar\partial\partial\rho_1(u))^{n-1}}{\langle\overline{u-w},u-z\rangle^n} \\ \quad = -\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{n-1}\,\mathrm{d}t \int\limits_{u\in S_{12}} f(u)A(t,u,z,\tilde w_0)\partial\rho_1(u)\wedge(\bar\partial\partial\rho_1(u))^{n-2}\wedge \mathrm{d}u_1. \end{cases}$$

En reportant les expressions (17) et (18) dans l'égalité (15), on termine la démonstration du lemme 8. En effet, tout point z dans la boule de centre w et de rayon $R-\varepsilon$ vérifie les conditions voulues: $D_{w_0 z}\subset B$ et $D_{\tilde w_0 z}\subset B$.

f est maintenant connu dans un ouvert de D.

3ème étape. Reconstruction de f dans D entier.

A l'étape précédente, nous avons explicité f dans un ouvert de D, la boule de centre w et de rayon $R-\varepsilon$.

Le théorème 3 permet d'exprimer $f(z)$ en tout point z de D tel que $D_{wz}\subset D$. L'application du théorème 3, réitérée un nombre fini de fois, permet de reconstituer f dans D tout entier.

IV. TROISIEME CAS: $1\leqslant p\leqslant n-2$

Il existe des fonctions $g_1,\dots,g_p$ holomorphes dans U et telles que

$$\operatorname{Re} g_i = u_i,\quad i=1,\dots,p.$$

D'après (1) et le lemme 1, dans U, éventuellement restreint, il existe un système de coordonnées holomorphes

$$(z_1=g_1,\dots,z_p=g_p,z_{p+1},\dots,z_n)$$

tel que le plan tangent complexe en z_0 à ∂D ait pour équation $z_n=z_{0n}$ et que D soit strictement convexe au voisinage de z_0 dans ce système de coordonnées. Il existe donc un hyperplan réel H, dont on peut supposer qu'il a pour équation $\operatorname{Re} z_n=0$, tel que

$$\partial D\cap H_1\cap\cdots\cap H_p\cap H^-\subset S,$$

où H^- est le demi-espace limité par H et contenant z_0 tandis que H_i $(i=1,\dots,p)$ désigne l'hyperplan $\{\operatorname{Re} z_i=0\}$. Définissons

$$V_k = D\cap H_1\cap\cdots\cap H_k,\quad k=1,\dots,p,$$

et, lorsque $y\in\mathbb{R}^k$,

$$V_{ky}=V_k\cap\{z\in\mathbb{C}^n: z_1=iy_1,\dots,z_k=iy_k\}.$$

1ère étape. Reconstruction de f dans un ouvert de V_p.

Soit $y\in\mathbb{R}^p$ tel que V_{py} soit non vide. f est connue sur $\bar V_p\cap H^-\cap\partial D\subset S$, et, par conséquent, sur $\bar V_{py}\cap H^-\cap\partial D$. En reprenant les calculs de la première étape du premier cas, on peut, pour tout z de $V_{py}\cap H^-$, exprimer $f(z)$ à l'aide des valeurs de f sur $\bar V_{py}\cap H^-\cap\partial D$. La fonction f est ainsi reconstituée sur $\bigcup_y V_{py}\cap H^- = V_p\cap H^-$ c'est-à-dire sur un ouvert de V_p.

2ème étape. Reconstruction de f dans un ouvert de V_{p-1}.
Soient $w \in V_p \cap H^-$ et $R > 0$ suffisamment petit pour que la boule

$$B_{p-1} = \{z \in V_{p-1} : |z - w|^2 - R^2 < 0\}$$

soit contenue dans $V_{p-1} \cap H^-$. Dans V_{p-1}, on peut appliquer le lemme 8: pour tout z dans une boule de centre w et de rayon $R - \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < R)$ et dans V_{p-1}, $f(z)$ s'exprime à l'aide des valeurs de f sur $V_p \cap \partial B_{p-1}$.

On réitère le processus utilisé à l'étape 2 afin de reconstruire la fonction f successivement dans des boules de $V_{p-2}, V_{p-3}, \ldots, V_1$ puis dans une boule de D.

(p+2)-ième étape. Reconstruction de f dans D entier.

La fonction f est connue dans la boule de centre w et de rayon $R - p\varepsilon$. Si z est un point de D tel que $D_{wz} \subset D$, le théorème 3 permet d'exprimer $f(z)$ à l'aide des valeurs de f dans la boule précédente. L'application du théorème 3, réitérée un nombre fini de fois, permet de reconstituer f dans D tout entier.

V. QUATRIEME CAS: $p = n - 1$

Définissons $g_1, \ldots, g_p$, $H_1, \ldots, H_p$, $V_1, \ldots, V_p$, $V_{1,y}, \ldots, V_{p,y}$, H, H^- comme dans le troisième cas.

1ère étape. Reconstruction de f dans un ouvert de V_{n-1}.

Le problème est le même que dans la 1ère étape du troisième cas. Mais ici, $V_{n-1,y}$ est une variété linéaire complexe de dimension 1 qui peut être considérée comme un ouvert de $\mathbb{C}$. On ne peut utiliser le théorème 2 qui est relatif à un domaine de $\mathbb{C}^n$ avec $n \geqslant 2$. Mais une translation, une rotation, une homothétie permettent de nous ramener au cas où $V_{n-1,y}$ est un ouvert convexe d'adhérence contenue dans le disque unité. La méthode de Carleman exposée dans le paragraphe I permet alors de reconstruire f dans l'ouvert $V_{n-1} \cap H^-$ de V_{n-1}.

Remarque 9. Dans le cas $n = 1$, l'hypothèse de régularité de la frontière du domaine D de $\mathbb{C}$ peut être affaiblie: pour que s'applique la méthode proposée dans la 1ère étape ci-dessus, il suffit que l'on puisse utiliser dans D la formule intégrale de Cauchy; il suffit, par exemple, que ∂D consiste en un nombre fini de courbes de Jordan de classe C^1.

Enfin l'hypothèse de la convexité de D est superflue. S est un arc contenu dans ∂D. Soit $z_0 \in S$ un point qui ne soit pas une extrémité de S tel que S soit de classe C^1 dans un voisinage de z_0. Si $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel suffisamment grand, l'image de D par l'application $h(z) = (z - z_0)^{1/n}$ est contenue dans un cône d'origine 0 et d'angle au sommet strictement inférieur à Π (pour la définition de h on choisit une coupure du plan qui ne rencontre $\bar{D}$ qu'au point z_0). A l'aide d'une rotation et d'une translation dans le plan $\mathbb{C}$, on peut alors se ramener au cas où

$$C^+ = \{\operatorname{Im} z > 0\} \cap \partial D \subset S.$$

On peut alors utiliser, sans changement, dans le domaine D à frontière de classe C^1 par morceaux, la méthode proposée dans la 1ère étape.

2ème étape et suivantes. Reconstruction de f dans D entier.

A l'issue de la 1ère étape, f est reconstituée dans un ouvert de V_{n-1}, on est ramené à la situation déjà rencontrée dans la 2ème étape du troisième cas. Comme alors, on reconstruit f successivement dans un ouvert de V_{n-2}, puis V_{n-3}, etc... On obtient f dans un ouvert de V_1, puis dans un ouvert de D. En procédant comme dans la dernière étape du troisième cas, on reconstruit, finalement, f dans D tout entier.

BIBLIOGRAPHIE

[A] Aizenberg, L.A. – A multidimensional analogue of a formula of Carleman. Soviet Math. Dokl., vol. **30**, no. 1, 241–243 (1984).

[AI] Aizenberg, L.A. – Carleman's formulas in complex analysis. Kluwer Acad. Publ. (1993).

[AT] Aizenberg, L.A. et V.M. Trutnev – On a method for the Borel summation of n-fold power series. Sibirskii Mat. Zhurnal, vol. **12**, no. 6, 1398–1404 (1971).

[B] Borel, E. – Leçons sur les séries divergentes. Paris (1928).

[C] Carleman, T. – Les fonctions quasi-analytiques. Gauthier–Villars, Paris (1926).

[H] Hardy, G.H. – Divergent series. Clarendon Press, Oxford (1949).

[N] Narasimhan – Compact analytic varieties. L'enseignement Math. **14**, 75–98 (1968).

[P1] Patil, D.J. – Representations of H^p-functions. Bull. AMS, vol. **78**, no. 4, 617–620 (1972).

[P2] Patil, D.J. – Recapturing H^2-functions on a polydisc. Trans. AMS, vol. **188**, no. 2, 97–103 (1974).

[P] Pincuk, S.I. – A boundary uniqueness theorem for holomorphic functions of several complex variables. Mat. Zametki, vol. **15**, 205–212 (1974).

[RS] Range, R.M. et Y.T. Siu – Uniform estimates for the $\bar{\partial}$-equation on domains with piecewise smooth strictly pseudoconvex boundaries. Math. Ann., vol. **206**, 325–354 (1973).

[R] Rudin, W. – Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$. Springer Verlag (1980).